

复合随机因素下航空发动机结构的可靠性分析

西北工业大学 王珍应* 吕文林 潘欣

【摘要】 同时考虑航空发动机材料的随机性, 结构几何形状的随机性, 随机载荷和随机边界条件, 研究复合随机因素下的概率有限元, 在摄动法的基础上推导出结构的随机应力场, 并建立相应的可靠性理论。分析随机因素的特征后, 导出现有的航空发动机结构可靠性分析的各种计算方法, 并进行了航空发动机的轮盘的可靠性分析。

主题词: 航空发动机 结构可靠性 概率 有限元

分类号: V 232 3

1 前言

在现代结构系统设计和力学性能分析中, 在些问题进行确定性强度分析是必要的。但这些结构通常存在着材料、结构几何形状、随机载荷和边界条件的随机性。显然, 对这些结构进行力学性能分析时不能采用确定性分析方法, 需要分析结构的可靠性, 近年来, 人们已对航空发动机的轮盘、叶片、轴和其它一些零件的可靠性做了许多研究^[1-4]。但由于问题本身的复杂性, 在现有的结构可靠性分析中, 只分别研究了单一随机因素的可靠性。这难于满足航空发动机设计的需要。本文研究在材料、几何形状、载荷和边界条件等随机因素复合作用下的概率有限元, 建立相应的可靠性理论, 并将其应用于航空发动机轮的可靠性分析。

2 复合随机应力场的概率有限元

一般情况下, 结构的材料性质、几何形状、外界作用力和边界条件都可能是随机变化的。我们可将这些随机变化量的随机场表示为 $R(\vec{x})$ (其中, $\vec{x}$ 为空间坐标)。将位移函数 $\vec{u}$ 在坐标点 $\vec{x}$ 以及随机场 $R(\vec{x})$ 的均值场 $\bar{R}(\vec{x})$ 处按泰勒级数展开, 取低于二阶的所有项, 忽略高阶项。

为了描述和阅读, 将矢量 $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ 记为 $\{u\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$, 本文中其它矢量都有类似的处理。

令 $dR = (R - \bar{R})\alpha$, 则 $\left\{u\left(R(\vec{x}), \vec{x}\right)\right\}$ 的泰勒级数展开式可写成关于摄动量 α 的二阶摄动形式:

$$\{u\} = \{u\}^{(0)} + \{u\}^{(1)}\alpha + \{u\}^{(2)}\alpha^2 \quad (1)$$

其中, $\{u\}$ 和 $\{u\}^{(0)}$ 分别表示位移随机函数在 R 和 $\bar{R}$ 点的函数值, $\{u\}^{(1)}$ 和 $\{u\}^{(2)}$ 分别表示 $\{u\}$ 的第一和二阶摄动量的系数。

同理, 可将应变函数 $\{\epsilon\}$ 、弹性矩阵 $[D]$ 、体积力 $\{F\}$ 、边界力 $\{P\}$ 、边界位移 $\{U_s\}$ 、边界外法线向量 $\{n\}$ 、体积雅可比 J_v 和面积雅可比 J_s 等展开为摄动量 α 的二阶摄动形式。

将随机场 $R(x)$ 离散为 N_R 个单元, 则 $R(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N_R} \psi_i(\vec{x}) R_i$, $\psi_i(\vec{x})$ 为随机场的形函数。在单元 i 上, ψ_i 为单位值, 在其它单元上为零值。 R_i 为 R 在第 i 单元上的值。

为了保证计算的收敛性, 让 J_v 、 J_s 、 $[D]$ 、 $\{F\}$ 、 $\{P\}$ 、 $\{u_s\}$ 的离散与随机场 $R(x)$ 的离散形式相同。现将结构划分为 N_E 个单元, 共有 N_P 个结点, 每个结点有 N_F 个自由度, 并设整体节点位移为 $\{d\}$, 单元节点位移为 $\{d\}_i$, 则位移场表达式(1)中的各未知项为

$$\begin{aligned} \{u\}^{(0)} &= [N(\vec{x})] \{d\}^{(0)} \\ \{u\}^{(1)} &= \sum_{k=1}^{N_R} [N(\vec{x})] \{d\}_k^{(1)} \Delta R_k, \quad \{u\}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_R} \sum_{l=1}^{N_R} [N(\vec{x})] \{d\}_{kl}^{(2)} \Delta R_k \Delta R_l \\ \{d\}_i^{(1)} &= \sum_{k=1}^{N_R} \{d\}_{ki}^{(1)} \Delta R_k, \quad \{d\}_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{N_R} \sum_{l=1}^{N_R} \{d\}_{kli}^{(2)} \Delta R_k \Delta R_l \end{aligned}$$

$[N(\vec{x})]$ 为整体位移形函数。

根据弹性体的变分原理, 并应用摄动方法, 进行大量计算可得到考虑材料、结构几何形状、载荷和边界条件等为随机量时的概率有限元的基本方程:

$$[K]^{(0)} \{d\}^{(0)} = \{Q\}^{(0)}, \quad [K]^{(0)} \{d\}_k^{(1)} = \{Q\}_k^{(1)}, \quad [K]^{(0)} \{d\}_{kl}^{(2)} = \{Q\}_{kl}^{(2)} \quad (k, l = 1, 2, 3, \dots, N_R) \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} [K]^{(0)} &= \int [L N]^T [D]^{(0)} [L N] J_v^{(0)} dV, \quad \{Q\}^{(0)} = \int [N]^T [F]^{(0)} J_v^{(0)} dV + \int [N]^T [P]^{(0)} J_s^{(0)} dS \\ \{Q\}_k^{(1)} &= \int [N]^T \left\{ \{F\}_k J_v^{(0)} + \{F\}^{(0)} (J_v')_k \right\} dV + \int [N]^T \left\{ \{P\}_k J_s^{(0)} + \{P\}^{(0)} (J_s')_k \right\} dS \\ &\quad - \int [L N]^T [D]^{(0)}_k [L N] \{d\}^{(0)} J_v^{(0)} dV - \int [L N]^T [D]^{(0)} [L N] \{d\}^{(0)} J_v' dV \\ \{Q\}_{kl}^{(2)} &= \frac{1}{2} \int [N]^T \left\{ \{F\}_{kl} J_v^{(0)} + 2 \{F\}_k (J_v')_l + \{F\}^{(0)} (J_v'')_{kl} \right\} dV \\ &\quad + \frac{1}{2} \int [N]^T \left\{ \{P\}_{kl} J_s^{(0)} + 2 \{P\}_k (J_s')_l + \{P\}^{(0)} (J_s'')_{kl} \right\} dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int [L N]^T [D]^{(0)}_{kl} [L N] \{d\}^{(0)} J_v^{(0)} dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int [L N]^T [D]^{(0)}_k [L N] \left\{ \{d\}_k J_v^{(0)} + 2 \{d\}^{(0)} (J_v')_l \right\} dV \\ &\quad - \int [L N]^T [D]^{(0)} [L N] \{d\}_k (J_v')_l dV - \frac{1}{2} \int [L N]^T [D]^{(0)} [L N] \{d\}^{(0)} \{J_v''\}_{kl} dV \end{aligned}$$

由此可得发动机结构的位移场和单元应变和应力的摄动表达式:

$$\{u(\vec{x})\} = \sum_{k=1}^{N_R} [N_i(\vec{x})] \left\{ \{d\}^{(0)} + \sum_{k=1}^{N_R} (\{d\}'_k \Delta R_k \alpha) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_R} \sum_{l=1}^{N_R} (\{d\}''_{kl} \Delta R_k \alpha \Delta R_l \alpha) \right\} \quad (3)$$

在实际计算中, 将 $\Delta R_k \alpha$ 记为 ΔR_k , 并计算指定单元的位移, 则单元 i 的位移、应变和应力分别为:

$$\{u(\vec{x})\}_i = [N(\vec{x})]_i \{d\}^{(0)} + \sum_{k=1}^{N_R} [N(\vec{x})]_i \{d\}'_k \Delta R_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_R} \sum_{l=1}^{N_R} [N(\vec{x})]_i \{d\}''_{kl} \Delta R_k \Delta R_l$$

$$\{\epsilon(\vec{x})\}_i = [B]_i \{d\}^{(0)} + \sum_{k=1}^{N_R} [B]_i \{d'_i\}_k \Delta R_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_R} \sum_{l=1}^{N_R} [B]_i \{d''_i\}_{kl} \Delta R_k \Delta R_l$$

$$\{\sigma(\vec{x})\}_i = \{\sigma(\vec{x})\}_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{N_R} (\{\sigma'_i\}_k) \Delta R_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_R} \sum_{l=1}^{N_R} (\{\sigma''_i\}_{kl}) \Delta R_k \Delta R_l$$

3 可靠性计算

通过分析计算后,可得到复合随机因素下航空发动机结构的随机位移场和随机应力场。通过概率统计分析,可得位移场和应力场的均值和自协方差矩阵。但仅有应力的均值和方差难以满足航空发动机的零部件的设计和性能分析的要求,必须进行可靠性分析。

无论研究何种失效模式,选用何种失效准则,都可将失效准则转化成下列关系式:

$$f(\{\sigma\}, \{\theta\}, \vec{x}) > 0 \quad (4)$$

其中,函数 $f(\{\sigma\}, \{\theta\}, \vec{x})$ 的具体形式与选择的强度或失效准则、材料性质和结构的应力状态有关。随机量 $\{\theta\} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s\}$ 的选取决定于材料性质、失效模式和选用的失效准则。

由此可建立可靠性分析的临界函数为: $g = f(\{\sigma\}, \{\theta\}, \vec{x})$ 。

分析计算可得临界函数及其均值和方差的摄动关系式:

$$g = g^0 + \sum_{k=1}^{N_R} \left(\frac{\partial g}{\partial R_k} \right) \Delta R_k + \sum_{k=1}^{N_S} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta_k} \right) \Delta \theta_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_R} \sum_{l=1}^{N_R} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial R_k \partial R_l} \right) \Delta R_k \Delta R_l$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_S} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \theta_k^2} \right) \Delta \theta_k^2 \quad (5)$$

$$E[g] = g^0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_R} \sum_{l=1}^{N_R} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial R_k \partial R_l} \right) \text{COV}(R_k, R_l) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_S} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \theta_k^2} \right) \text{Var}[\theta_k] \quad (6)$$

$$\text{Var}[g] = \sum_{k=1}^{N_R} \sum_{l=1}^{N_R} \left(\frac{\partial g}{\partial R_k} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial R_l} \right) \text{COV}(R_k, R_l) + \sum_{k=1}^{N_S} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta_k} \right)^2 \text{Var}[\theta_k] \quad (7)$$

其中 $\text{COV}(R_k, R_l)$ 为随机变量 R_k 和 R_l 的协方差, $\text{Var}[\theta_k]$ 为随机变量 θ_k 的方差。

相应的可靠度 R_e 和破坏概率 P_f 分别为:

$$P_f = \Phi(-\beta), \quad R_e = 1 - P_f = \Phi(\beta), \quad \beta = E(g) / \sqrt{\text{Var}[g]} \quad (8)$$

其中 $\Phi(\beta)$ 为标准正态分布, β 为可靠性指数。

(4) - (8) 式构成复合随机因素下航空发动机结构可靠性分析的普遍关系式。依靠本文推导的概率有限元方法,我们能处理任何复杂条件下的发动机可靠性问题。当然,此理论也适合于其它结构的可靠性分析。

通常,航空发动机结构的随机量之间是相互独立的,即随机量 R_k 和 θ 相互独立,则(5)式可转化成线性形式:

$$g = C_0 + \sum_{k=1}^N B_k \lambda_k, \quad Y = \{\{R\}^T, \{\theta\}^T\}^T, \quad \lambda_k = \{Y_k - (\bar{Y}_k - A_k^2/2B_k)\}^2 \quad (9)$$

$$\text{其中 } N = N_R + N_S, \quad C_0 = g^0 - \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^N \frac{A_k^2}{B_k} \right), \quad A_k = \left(\frac{\partial g}{\partial Y_k} \right), \quad B_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial Y_k^2} \right)$$

设随机量 λ_k 的均值为 μ_{λ_k} , 方差为 $\sigma_{\lambda_k}^2$, 则可靠性指数可由下式得出:

$$\beta = \left(C_0 + \sum_{k=1}^N B_k \mu_{\lambda_k} \right) / \left(\sqrt{\sum_{k=1}^N B_k^2 \sigma_{\lambda_k}^2} \right) \quad (10)$$

4 应用

现将上述理论具体应用于航空发动机轮盘的可靠性分析。当考虑轮盘的几何尺寸为随机变量时,可用简化Mises强度准则进行强度校核(设轮盘处于双向应力状态)。这时 $\{\Theta\} = \{\sigma_s\}$ 为材料的强度,强度校核准则可写成

$$f(\{\sigma\}, \{\Theta\}, \{\vec{x}\}) = 1 - (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)/\sigma_s^2 > 0$$

则临界函数为:

$$g = 1 - (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)/\sigma_s^2$$

作相应的计算后,可得到与文献[3]完全相同的结果。

用本文的方法估算离心叶轮轮盘的低周疲劳寿命可靠性。当考虑轮盘的载荷为随机量,并用兰德拉夫的损伤公式进行轮盘低周疲劳寿命的可靠性分析时, $\{\Theta\} = \{\sigma_f, b, c\}^T$,由失效准则可导出关系式:

$$f(\{\sigma\}, \{\Theta\}, \{\vec{x}\}) = 1 - \sum_{k=1}^m \left\{ n_k \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_f - \sigma_m} \right)^{\frac{1}{b-c}} \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_a} \right)^{\frac{1}{b}} \right\}$$

则临界函数为:

$$g = 1 - \sum_{k=1}^m \left\{ n_k \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_f - \sigma_m} \right)^{\frac{1}{b-c}} \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_a} \right)^{\frac{1}{b}} \right\}$$

其中, σ_f 为疲劳强度系数, b 为疲劳强度指数, c 为疲劳延性指数。

计算可知,离心叶轮轮盘的塑性最严重的区域在内孔处,也是最危险点。这与实际情况是相吻合的,据此求出的可靠度是可信的。按工作循环为 5000r/min 时,计算可得低周疲劳的可靠度为 0.9995。

由此可见,本文研究的航空发动机结构可靠性分析理论是目前考虑随机因素最全面,能处理不同的失效模式可靠性理论。

参 考 文 献

- 1 吕文林,付爽 考虑材料物理参数为随机量时可靠度的计算 航空动力学报,1993,8(1)
- 2 吕文林,段振龙 随机有限元分析定向结晶涡轮叶片在随机压力场的可靠性 航空动力学报,1991,6(1)
- 3 王珍应,吕文林 用摄动法研究几何尺寸为随机量时轮盘的可靠性 航空动力学报,1994,9(4)
- 4 Bilal M, Myyub, Chao Yichia Generalized Conditional Expectation for Structural Reliability Assessment Structural Safety, 11, 1992

(责任编辑 王震华 魏星禄)

A MULTISTAGE FINITE ELEMENT METHOD FOR TRANSONIC FLOW CALCULATION IN TURBOMACHINERY

Zhu Gang, Shen Mengyu, Liu Qiusheng, Wang Baoguo

(Dept. of Engineering Mechanics, Tsing Hua University, Beijing, 100084)

ABSTRACT In the light of the idea of Multistage Finite Element Method, The anisotropic tensor force finite element and the Taylor- Galerkin finite element method have been combined properly into a new method which called anisotropic multistage finite element method. This method is superior in convergence speed and stability and suitable to transonic flow calculations. We applied this method to analyzing the transonic flow in a two-dimensional cascade and compared with its experimental data. It is shown that this method is a powerful tool for the transonic flow calculation.

Key words Transonic flow Turbomachines Finite element method

ANALYSIS OF FATIGUE CRACK GROWTH IN GLALL

Zhang Xueren and Nie Jingxu

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT A finite element analysis is applied to the fatigue crack growth properties in glass aluminum hybrid laminates (GLALL). The stress and strain fields of GLALL with different crack length are obtained from the computation, in which the cracks are assumed to expand only in Al layers. The relationship of the effective stress intensity factors on the crack tips to the crack length is derived by the energy method. It is found that the bridging effect of the glass fibers with high strength on the cracks in Al layers decreases obviously the effective stress intensity factors thus the growth rate of the fatigue cracks is cut down to a great extent. The computation results agree well with the experimental data.

Key words Laminates Fatigue crack Diffusion Characteristics

STRUCTURAL RELIABILITY ANALYSIS OF AN AEROENGINE WITH COMPLEX UNCERTAINTY

Wang Zhenying and Lu Wenlin

(Dept. of Aeroengine, Northwestern Polytechnical University 710072)

ABSTRACT Random material properties, geometrical shapes, forces and displacement boundary condition of an aeroengine are directly introduced into functional variational formulations and a unified random variational principle and the probabilistic finite element method with the small parameter perturbation method are provided. Based on second-order perturbation technique, the formulations for the random stresses and the reliability of the aeroengine's structures are derived. According to analysis the characteristics of these random parameters, the simple methods for analyzing the aeroengine structural reliability are obtained. At last, the reliability of a rotating disk of the aeroengine is analyzed with a simple numerical example.

Key words Aircraft engines Structural reliability Probability Finite elements